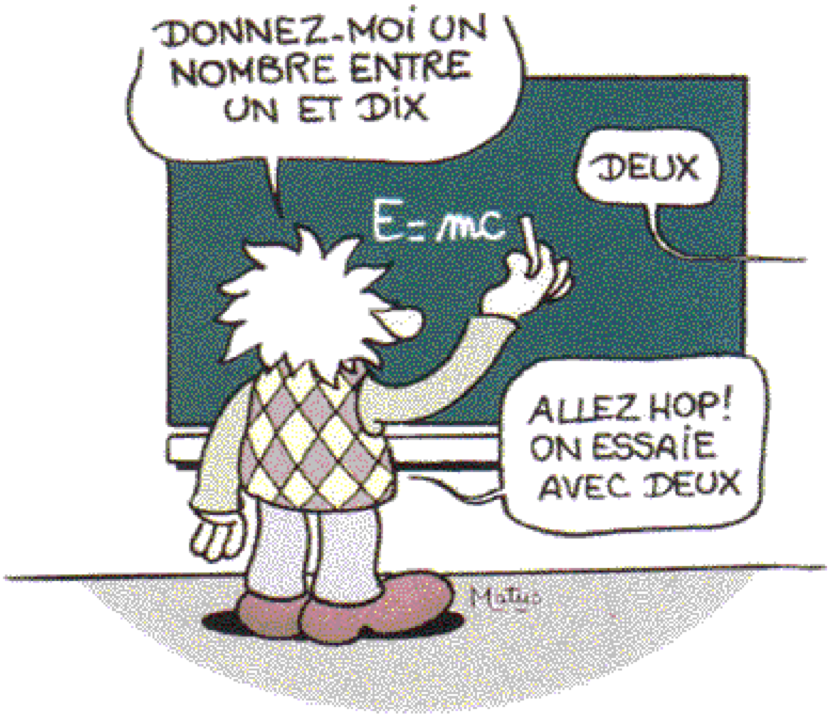
Modélisation mathématique et physique [1]



[1]ORFILA Olivier Tèl/Fax : 0240845717/5992 Email : olivier.orfila@lcpc.fr

Table des matières

Chapitre 1

Rappels sur les fonctions numériques

1.1 Définition

Permet d'associer une réel à un autre nombre réel

1.1.1 Exemple

Equation de droites. L'équation d'une droite est définie par une fonction f.

$$f(x) = 2x + 3$$
$$f(5) = 2 \times 5 + 3$$
$$f(0) = 3$$

1.1.2 Représentation graphique

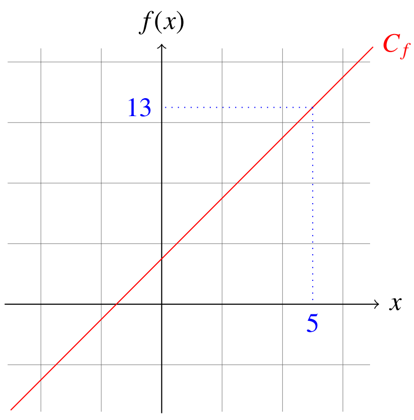


FIG. 1.1 – C_f Courbe représentative de f

1.1.3 Généralisation

Si f est une fonction numérique, alors :

– $f(a)$ est l'image de a par la fonction f

– a est l'antécédent de $f(a)$ par la fonction f

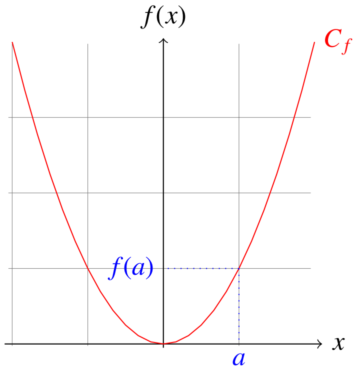


FIG. 1.2 – Image et antécédent

1.2 Ensemble de définition

L'ensemble de définition D_f d'une fonction f, est l'ensemble des valeurs réelles dont il est possible de calculer une image par la fonction f.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}; f(x)\ existe\}$$

Chaque point de l'ensemble de définition D_f a une et une seule image. Au contraire, un point de l'ensemble des images peut avoir un ou plusieurs antécédents.

1.2.1 Exemples

1. $f(x) = 2x + 3$
   $D_f = \{x\ reel\} = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$
   $D_f = \{x\ reel, x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$
3. $f(x) = \sqrt{2x - 5}$
   Pour que $f(x)$ existe, il faut que
   $2x - 5 \geqslant 0$
   $2x \geqslant 5$
   $x \geqslant \frac{5}{2}$
   $D_f = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$

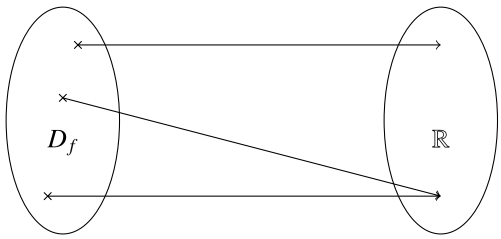


FIG. 1.3 – Domaines de définition

Chaque point de l'intervalle de définition D_f a une et une seule image. Par contre, un point de l'ensemble image peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents.

1.2.2 Notation

$$f : \begin{cases} D_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

1.2.3 Contre exemple

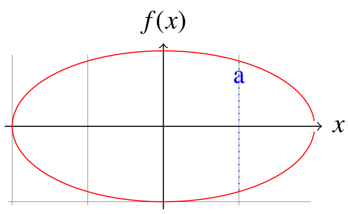


FIG. 1.4 – f n'est pas une fonction

1.3 Composée de fonction

Si f et g sont deux fonctions définies sur leurs ensembles de définition D_f et D_g alors $g \circ f$ est une nouvelle fonction définie par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

1.3.1 Exemple

$$f : x \mapsto x^2 - 1$$

$$g : x \mapsto \frac{-2}{x}$$

1. Donner D_f et D_g. En déduire D : ensemble de définition de $g \circ f$.
2. Calculer $(g \circ f)(x)$ pour tout x appartenant à D.

1. $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}^*$. Pour que x appartienne à D, il faut que $f(x)$ appartienne à D_g soit :

$$\begin{aligned} f(x) &\neq 0 \\ x^2 - 1 &\neq 0 \\ x &\neq \{-1; 1\} \end{aligned}$$

   $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
2. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = \frac{-2}{x^2-1}$

1.4 Limites de fonction

1.4.1 Fonctions références en $x = +\infty$ ou $x = -\infty$

x	10	100	1 000	1 000 000
$f(x) = x^2$	100	10 000	1 000 000	10^{12}

Tab. 1.1 – Fonction x^2

Lorsque x devient de plus en plus grand, $f(x)$ aussi devient de plus en plus grand :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

De manière générale, on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{cases}$$

Aussi, en $-\infty$ on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \end{cases}$$

Généralisation :

$$\lim_{x \to -\infty} x^p = \begin{cases} +\infty \; si \; p \; est \; pair \\ -\infty \; si \; p \; est \; impair \end{cases}$$

1.4.2 La fonction $\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \\ D_f &= \mathbb{R}^* \\ &=]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\end{aligned}$$

De manière générale, dans toute étude de fonction, on détermine les limites aux bornesde l'ensemble de définition

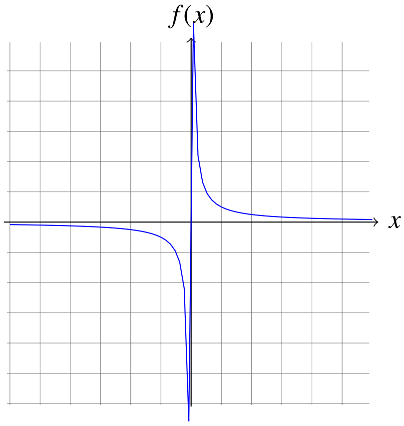


FIG. 1.5 – Fonction $\frac{1}{x}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{cases}$$

1.4.3 Opérations sur les limites

Somme

Une limite finie est considérée "négligeable" par rapport à une limite infinie :

Si $\lim_{x\to k} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to k} g(x) = m$ alors $\lim_{x\to k}(f(x) + g(x)) = +\infty$

Produit

La règle des signes s'applique à $+\infty$ et $-\infty$
Si $\lim_{x\to k} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to k} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to k}(f(x)g(x)) = -\infty$
Si $\lim_{x\to k} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to k} g(x) = -m$ alors $\lim_{x\to k}(f(x)g(x)) = -\infty$

Formes indéterminées

$$\begin{cases} +\infty - \infty \\ 0 \times \infty \\ \dfrac{\infty}{\infty} \end{cases}$$

Exercice

Soit $f(x) = x^2 + x$
Donner D_f ainsi que les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Chapitre 2

Fonctions numériques (2)

2.1 Asymptotes à une courbe

2.1.1 Asymptotes verticales

Exemple de la fonction $\frac{1}{x}$

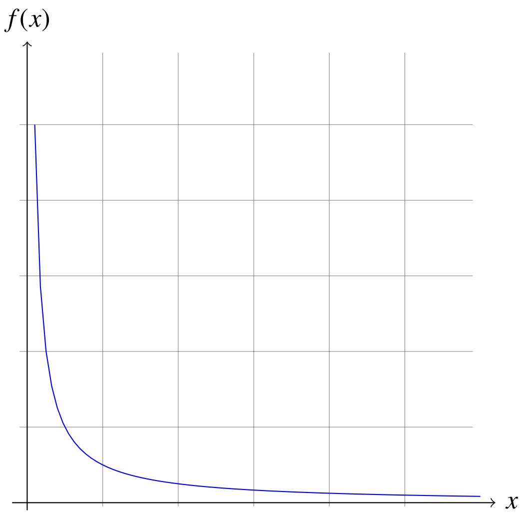


FIG. 2.1 – Fonction $\frac{1}{x}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

A mesure que x se rapproche de 0, la courbe C_f se rapproche de la droite d'équation $x = 0$. On dit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe C_f.
De manière générale, si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote

verticale à la courbe C_f.
Prenons pour exemple la fonction $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$. On sait que f est définie quand $x^2-4 \neq 0$ soit $x \neq -2$ et $x \neq 2$. Maintenant, si on étudie la limite de f en $x = 2$, on obtient :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2}(x^2-4) = 0\end{array}\right\} \lim_{x\to 2} \frac{x}{x^2-4} = \infty$$

De la même manière on trouve une deuxième asymptote d'équation $x = -2$. De façon générale, les asymptotes verticales se trouvent aux abcisses auxquelles f n'est pas définie.

2.1.2 Asymptotes horizontales

Exemple de la fonction $\frac{1}{x}$

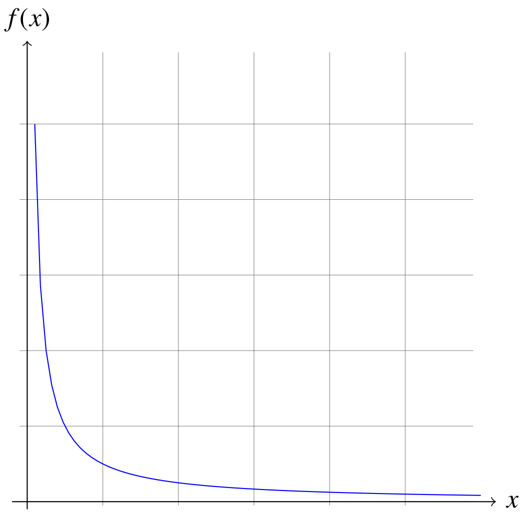


FIG. 2.2 – Fonction $\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Plus x devient grand, plus C_f se rapproche de la droite d'équation $y = 0$. On dit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à C_f en $x = +\infty$.
Dans le cas général, si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à C_f en $x = +\infty$.

2.1.3 Asymptotes obliques : généralistion des asymptotes horizontales

La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C_f si :

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

Exemple

Soit $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x}$. Lorsque l'équation de C_f est écrite sous cette forme, on constate que la droite d'équation $y = x + 3$ est asymptote oblique à C_f. En effet, on a :

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (x+3)) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x+3)) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

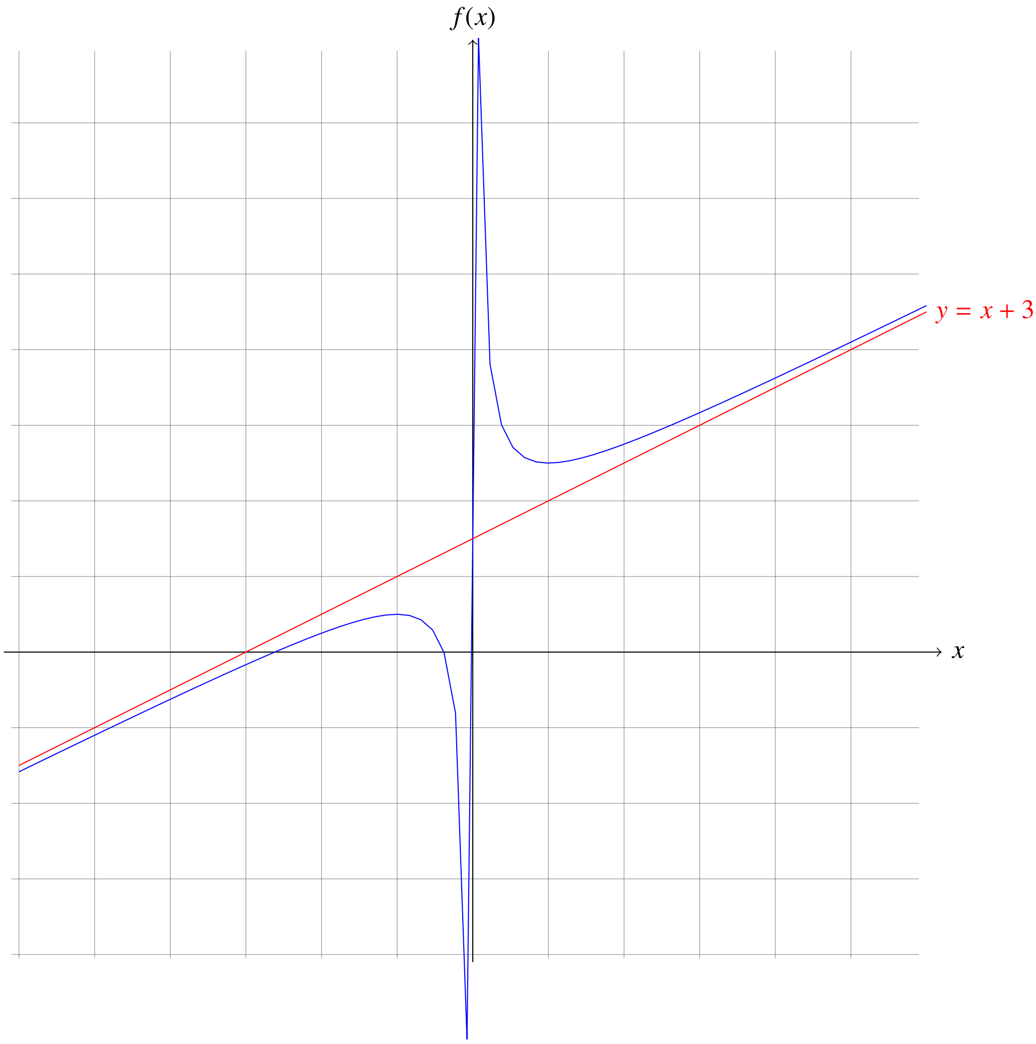


FIG. 2.3 – Fonction $x + 3 + \frac{1}{x}$

Les asymptotes permettent :

1. D'approcher une fonction par une équation plus simple aux bornes de son l'ensemble de définition.
2. D'apporter une aide indispensable lors du tracé de la courbe représentative d'une fonction. En effet, on commence toujours par tracer les asymptotes.

2.2 Applications des limites : introduction aux nombres dérivés

Le nombre d est le nombre dérivé de f en a si :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = d$$

Prenons pour exemple la fonction $f(x) = 3$.

$$\begin{cases} f(x) = 3 \\ f(a) = 3 \\ f(a+h) = 3 \end{cases}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0$$

Le nombre dérivée de la fonction f en a, $f'(a)$ est donc 0. A partir de ces relations, on peut en déduire que pour $f(x) = x$, $f'(a) = 1$ et pour $g(x) = x^2$, $g'(a) = 2a$. Par définition, d est un réel. Donc si $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en $x = a$.

2.2.1 Interprétation géométrique

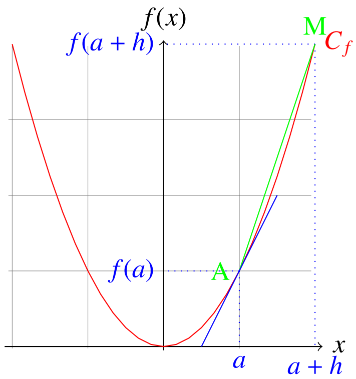


FIG. 2.4 – Interprétation géométrique

Le nombre dérivé représente donc le coefficient directeur de la droite (AM). Quand h tend vers 0, M se rapproche de A et la droite (AM) se rapproche de la tangente à la courbe C_f en A. Le nombre dérivé en $x = a$ est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f en $x = a$.

Exercice

Donner l'équation de la tangente en $x = 2$ à la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$.

2.2.2 Exemple d'interprétation physique, la vitesse instantannée

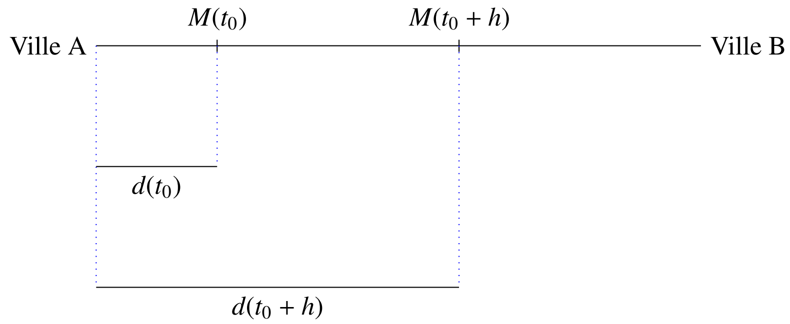


FIG. 2.5 – Interprétation physique : vitesse instantannée

Tout d'abord, commencons par calculer la vitesse moyenne pratiquée entre les instants t_0 et $t_0 + h$:

$$V_{moy} = \frac{distance}{temps} = \frac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{(t_0 + h) - t_0} = \frac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h} \tag{2.2.1}$$

On constate alors que quand h tend vers 0, la vitesse instantannée au temps $t = t_0$ est définie par :

$$V_{t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h}$$

La vitesse instantannée au temps $t = t_0$ est donc le nombre dérivé de la fonction d au temps $t = t_0$.

2.3 Fonctions dérivées

2.3.1 Définition

La fonction qui a tout x associe le nombre dérivé de la fonction f en x s'appelle fonction dérivé de f. On la note f'.

Exemples

- Pour la fonction $f(x) = c^{te}$, $f'(x) = 0$
- Pour la fonction $f(x) = x$, $f'(x) = 1$
- Pour la fonction $f(x) = x^2$, $f'(x)2x$

2.3.2 Opérations sur les fonctions dérivées

Soit deux fonctions u et v dont les deux fonctions dérivées sont respectivement u' et v'. Les opérations suivantes sur les dérivées sont alors définies :

$$\begin{cases} (u+v)' = u' + v' \\ (ku)' = ku', \ k \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x + 12$. Calculer $f'(x)$. On pose alors $k = 3$, $u = x$ et $v = 12$. D'après les règles de calcul énoncées précédemment, $f'(x) = ku' + v'$. Or $u' = 1$ et $v' = 0$. On a donc $f'(x) = 3$.

Chapitre 3

Les fonctions dérivées

3.1 Dérivées de fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	D_f
a	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$

TAB. 3.1 – Dérivées de fonctions usuelles

3.2 Opération sur les dérivées

3.2.1 Addition et multiplication de fonctions

$$\begin{cases} (u+v)' = u' + v' \\ (ku)' = ku', \ k \in \mathbb{R} \\ (uv)' = u'v + uv' \end{cases} \tag{3.2.1}$$

3.2.2 Fonctions à la puissance n

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

3.2.3 Inverse d'une fonction

$$(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$$

3.2.4 Division de fonctions

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

3.2.5 Composée de fonctions simples

Si $g(x) = f(ax+b)$, alors :

$$g'(x) = af'(ax+b)$$

3.2.6 Généralisation des composées

Si $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$ alors :

$$f'(x) = v'(x)u'(v(x))$$

3.3 Variation et dérivées

3.3.1 Rappels

Une fonction f est dite croissante sur un intervalle I si $\forall (a,b) \in I,\ a \geqslant b,\ f(a) \geqslant f(b)$.

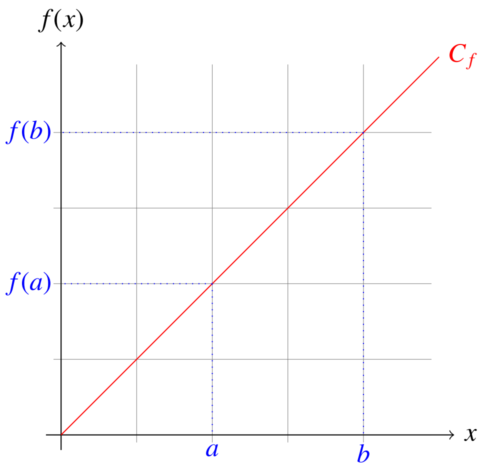


FIG. 3.1 – Fonction croissante

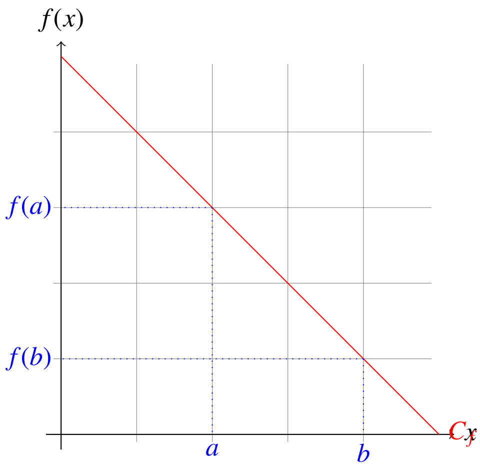


FIG. 3.2 – Fonction décroissante

Si f est dérivable sur $I = [a; b]$ alors :
- Si $f' > 0$ sur I alors f est croissante sur I
- Si $f' < 0$ sur I alors f est décroissante sur I
- Si $f' = 0$ sur I alors f est monotone (constante) sur I

3.3.2 Exercice

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$
Dresser le tableau de variation et tracer la représentation graphique de f. Pour ce faire :
- Calculer $f'(x)$ sur D_f
- Etudier le signe de $f'(x)$
- En déduire le sens de variation de f d'après les règles énoncées précédemment.

1. $D_f = \mathbb{R}$ et $f'(x) = -2x + 2$
2. $-2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ donc :
   - Sur $]-\infty; 1[$, $f'(x) > 0$
   - Sur $]1; +\infty[$, $f'(x) < 0$
   - En $x = 1$, $f'(x) = 0$
3. D'après les règles énoncées précédemment,
   - Sur $]-\infty; 1[$, f est croissante
   - Sur $]1; +\infty[$, f est décroissante
   - En $x = 1$, la dérivée est nulle, nous avons donc une tangente horizontale

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

TAB. 3.2 – Tableau de variation

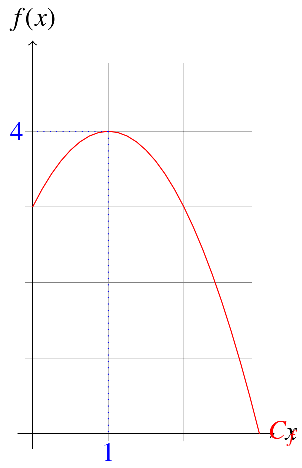


FIG. 3.3 – Représentation graphique

3.3.3 Remarque

Le nombre dérivée de la fonction f en $x + 1$ est nul. La tangente en $x + 1$ est donc parallèle à l'axe des abscisses. La fonction f possède un maximum en $x + 1$.

3.3.4 Généralisation

Si $f'(a) = 0$, alors C_f admet une tangente horizontale en $x = a$. De plus, si $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = a$, alors $f(a)$ est un extremum local de f.

3.4 Etude de fonction

Méthode à suivre pour une étude complête d'une fonction f :

1. Déterminer D_f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. En déduire les asymptotes horizontales et verticales à C_f.
4. Etudier la présence d'une asymptote oblique à C_f .
5. Calculer $f'(x)$.
6. Etudier le signe de $f'(x)$.
7. En déduire les variations de f.
8. Dresser le tableau de variation (avec les limites).
9. Donner la représentation graphique de la fonction f à l'aide des tangentes horizontales et des asymptotes trouvées précédemment.

3.4.1 Exemple

Chapitre 4

Fonctions dérivées et primitives

4.1 Rappels et fonctions dérivées

$f(x)$	$f'(x)$	D'_f
a	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$u+v$	$u'+v'$	
uv	$u'v+uv'$	
ku	ku'	
u^n	$nu'u^{n-1}$	
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	
$\cos u$	$-u'\sin u$	
$\sin u$	$u'\cos u$	
$u \circ v$	$v'(u(v))'$	

TAB. 4.1 – Dérivées de fonctions usuelles

4.2 Les primitives et le calcul intégral

Initié par les grecs, le calcul intégral s'est développé avec une classe très large de problèmes allant du calcul d'aire au centre de gravité. Il constitue en quelques sortes le problème "inverse" de la dérivée.

4.2.1 Exemple

Soit une fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 2x + 4 \end{aligned}$$

Et F définie par :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x + 2 \end{aligned}$$

On remarque $F'(x) = x^2 - 2x + 4 = f(x)$.

- $f(x)$ est la dérivée de $F(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- $F(x)$ est <u>une</u> primitive de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

4.2.2 Définition

Pour une fonction numérique f définie sur un intervalle I, on appelle fonction primitive ou primitive de f sur I toute fonction F dérivable telle que :

$$F'(x) = f(x), \ \forall x \in I$$

4.3 Ensemble des primitives d'une fonction

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 4 \\ G(x) &= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x + 5 \end{aligned}$$

On remarque que $G'(x) = f(x)$. Donc G est aussi une primitive de f. De plus, $F(x)$ et $G(x)$ ne diffère que d'une constante.
On définit l'ensemble des primitives d'une fonction numérique f comme $F + k$ avec $F'(x) = f(x)$ et $k \in \mathbb{R}$. Les différentes primitives d'une fonction ne différent que d'une constante. On le note :

$$\int f(x)dx = F + k$$

4.3.1 démonstration

$$(F + k)' = F' + k' = F' = f(x)$$

4.3.2 Exemple

Déterminer la fonction primitive de f telle que $F(0) = 0$.

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x + k$$
$$F(0) = k$$

Or on recherche $F(0) = 0$, donc $k = 0$ et :

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x$$

4.4 Les primitives usuelles

f	F
a	$ax + k$
x	$\frac{x^2}{2} + k$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + k$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$

Tab. 4.2 – Fonctions primitives usuelles

4.4.1 Remarque

- Une bonne maîtrise du calcul des dérivées est nécessaire au calcul de primitives.
- Pour savoir si la primitive calculée est juste, il suffit de la dériver et de vérifier que l'on retrouve la fonction d'origine. Bien sur il ne faut pas commettre d'erreur sur la dérivée !

4.4.2 Exercice 1

Calculer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = -\frac{3}{(3x-1)^2}$

4.4.3 Exercice 2

Calculer la primitive de $f(x) = 2x + 3$ telle que $F(-1) = 2$.

Chapitre 5

Calcul intégral

5.1 Rappels

F est une primitive de f si :

$$F'(x) = f(x)$$

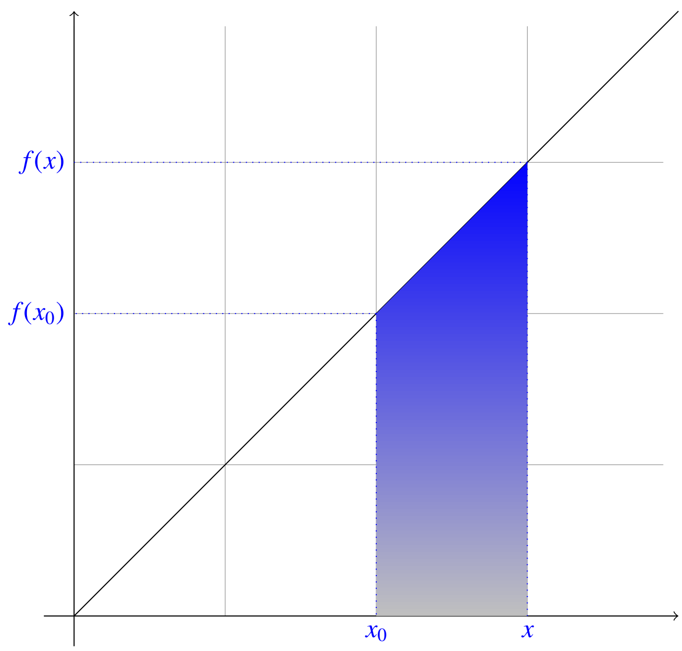


FIG. 5.1 – Aire sous la courbe

Soit $A(x)$ l'aire sous la courbe comprise entre O et x
Soit $A(x_0)$ l'aire sous la courbe comprise entre O et x_0

On peut donc en déduire que :

$$
\begin{aligned}
(x-x_0)f(x_0) \leqslant A(x)-A(x_0) &\leqslant (x-x_0)f(x) \\
f(x_0) \leqslant \frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0} &\leqslant f(x) \\
\lim_{x\to x_0} f(x_0) \leqslant \lim_{x\to x_0} \frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0} &\leqslant \lim_{x\to x_0} f(x) \\
f(x_0) \leqslant A'(x_0) &\leqslant f(x_0)
\end{aligned}
$$

Donc $A'(x_0) = f(x_0)$ et la fonction qui associe l'aire sous la courbe à la position x, $A(x)$ est une primitive de $f(x)$.

5.2 Les intégrales

Soit f une fonction dérivable sur un ensemble I. F est une primmitive de f sur I et a et b appartiennent à I.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

5.2.1 Propriétés

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Exemple

Calculer l'intégrale de la fonction $f(x) = 5x^4 - 8x^3 + 2$ sur $[0;1]$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 (5x^4 - 8x^3 + 2)dx &= 5\int_0^1 x^4dx - 8\int_0^1 x^3 + 2\int_0^1 dx \\
&= 5[\frac{x^5}{5}]_0^1 - 8[\frac{x^4}{4}]_0^1 + 2[x]_0^1 \\
&= 1 - 2 + 2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

5.3 Interprétation graphique

L'intégrale d'un fonction sur un intervalle [a ;b] représente l'aire sous la courbe entre les points d'abscisses $x = a$ et $x = b$.

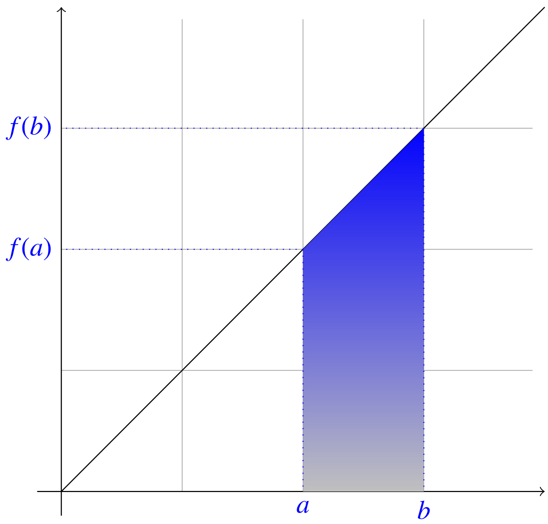


FIG. 5.2 – Aire sous la courbe

Si A est l'aire colorée, alors, $\int_a^b f(x)dx = A$.
Dans le cas où la fonction est négative, on a $A = -\int_a^b f(x)dx$

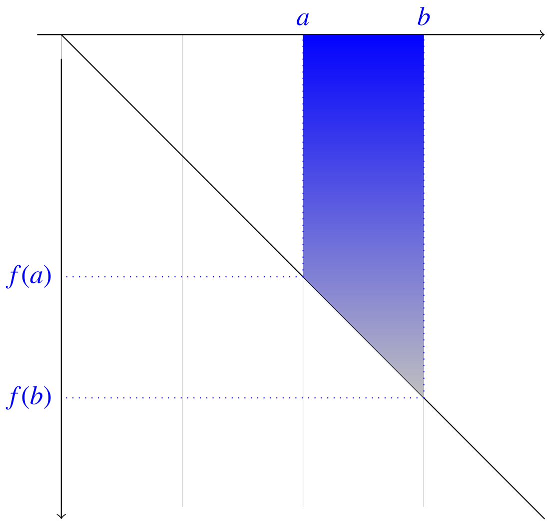


FIG. 5.3 – Aire sous la courbe, fonction négative

5.3.1 Exemple

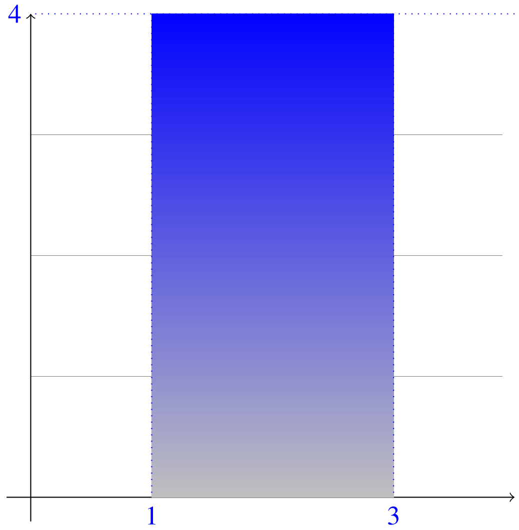


FIG. 5.4 – Aire d'un rectangle

Soit A_r l'aire du rectangle. On sait que $A_r = (3 - 1) \times 4 = 8$. Or à l'aide du calcul intégral, on peut effectuer ce calcule d'une autre manière.

$$\int_1^3 4dx = 4 \int_1^3 dx = 4[x]_1^3 = 4 \times (3 - 1) = 8$$

5.3.2 Exercice

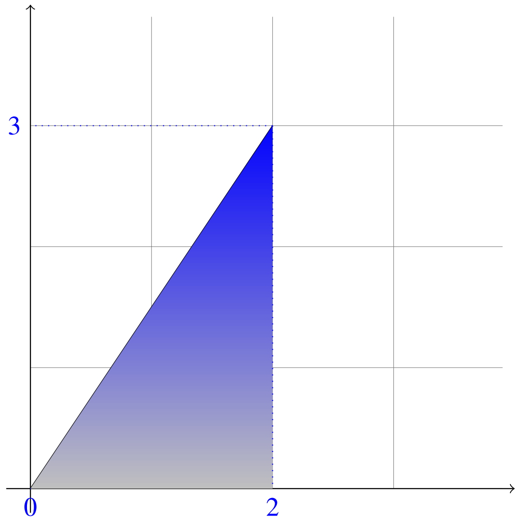


FIG. 5.5 – Aire d'un traingle

Soit A_t l'aire hachurée. Calculer A_t de deux manières.

5.3.3 Propriété

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

5.3.4 Inégalité

Si $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

5.3.5 Valeur moyenne sur un segment $[a, b]$

On appelle m la moyenne d'un fonction f sur un intervalle $[a, b]$.

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Exemple

Calcul de la valeur moyenne de la fonction *sinus* sur $[0, \pi]$:

$$m = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^\pi \sin x dx = \frac{1}{\pi}[-\cos x]_0^\pi = \frac{2}{\pi}$$

5.4 Intégration par partie

L'intégration par partie est une technique de calcul issue de la dérivée d'un produit de fonctions.

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

5.4.1 Démonstration

$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$u'v = (uv)' - uv'$$

$$\int_a^b u'vdx = \int_a^b (uv)'dx - \int_a^b uv'dx$$

$$\int_a^b u'vdx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'dx$$

5.4.2 Exemple

Calculer $\int_0^\pi x\sin xdx$. On pose tout d'abord :

$$u' = \sin x \quad u = -\cos x$$
$$v = x \quad v' = 1$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^\pi x\sin xdx = [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos xdx = \pi - 0 + [\sin x]_0^\pi = \pi$$

5.5 Calcul de surface

Si $f(x) \leqslant g(x)$ alors l'aire A comprise entre les représentations graphiques de f et de g entre les points d'absicsses a et b peut être calculée :

$$A = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

5.6 Calcul de volume

Le volume de solide de révolution ou d'extrusion est facilement calculable en utilisant la formule suivante.

$$V_{solide} = \int_a^b S(x)dx$$

Chapitre 6

Logarithme Népérien

6.1 Introduction

La notion mathématique de logarithme a été introduite par le mathématicien écossais Neper au dix septième siècle. A l'époque, l'astronomie faisait des progrès très important qui nécéssitaient des calculs de plus en plus précis et donc de plus en plus longs. Des techniques de simplification de calculs ont donc été recherchées. En particulier, les machines à calculer n'existant pas à cette époque, les multiplications étaient très difficiles. Néper a découvert un procédé permettant d'obtenir le résultat d'une multiplication à l'aide d'une addition :

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

6.2 Définition et propriétés

6.2.1 Définition

La fonction logarithme népérien est définie comme étant la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ qui prend la valeur 0 pour $x = 1$.

6.2.2 Notation

La fonction logarithme népérien est noté :

$$\begin{array}{c} x \mapsto \ln x \\ ]0, +\infty[\to \mathbb{R} \end{array}$$

6.2.3 Propriétés

La fonction logarithme transforme un produit en une somme :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

6.2.4 Application

- Si $b = \frac{1}{a}$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{a}$$

$$\ln 1 = \ln a + \ln \frac{1}{a}$$

$$0 = \ln a + \ln \frac{1}{a}$$

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

-

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

6.2.5 Logarithme d'une puissance

$$\ln(a^2) = \ln(a \times a) = \ln a + \ln a = 2\ln a$$

$$\ln(a^3) = \ln(a^2 \times a) = \ln a^2 + \ln a = 2\ln a + \ln a = 3\ln a$$

Généralisation

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

6.3 Variations et courbe représentative

Par définition, $\forall x \in]0; +\infty[$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$\ln x$			$\nearrow$		

TAB. 6.1 – Tableau de variation $\ln x$

$$\begin{cases} \forall x \in]0;1[, \ \ln x < 0 \\ \forall x \in]1;+\infty[, \ \ln x > 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \ln a = \ln b \ ssi \ a = b \\ \ln a \geqslant \ln b \ ssi \ a \geqslant b \\ \ln a \leqslant \ln b \ ssi \ a \leqslant b \end{cases}$$

6.4 Limites

6.4.1 Limites en $x = \pm\infty$

x	10	1000	10^6	10^9
$\ln x$	2,3	6,91	13,82	20,72

Tab. 6.2 – Tableau de valeur : fonction logarithme népérien

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

On remarque que la fonction logarithme augmente "très lentement".

6.4.2 Limites en $x = 0$

Posons $x = \frac{1}{y}$. Quand x tend vers $+\infty$, y tend vers 0. Aussi, on a $\ln x = \ln \frac{1}{y} = -\ln y$.

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{y\to 0} -\ln y = +\infty \Leftrightarrow \lim_{y\to 0} \ln y = -\infty$$

Donc, on a :

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

On définit le nombre e pour lequel $\ln e = 1$. En pratique, $e \approx 2,7$.

x	0		1	e		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	1	$+$	
$\ln x$	$-\infty$		$\nearrow$			$+\infty$

Tab. 6.3 – Tableau de variation $\ln x$

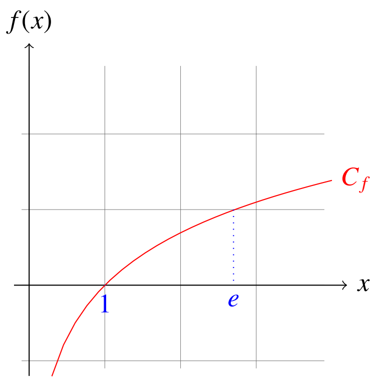


FIG. 6.1 – Logarithme népérien

6.5 Dérivée

Si $f(x) = \ln(u(x))$ alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

6.5.1 Exemple

Soit f définie par $f(x) = \ln(3x+5)$ sur un intervale $I =]-\frac{5}{3}; +\infty[$. Cette fonction est du type $\ln u$ avec $u(x) = 3x+5$ et $u'(x) = 3$. On a donc :

$$f'(x) = \frac{3}{3x+5}$$

6.6 Primitives

Soit I un intervale et u une fonction telle que $u(x) \neq 0\ \forall x \in I$. La fonction $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitives les fonctions définies par F :

$$F(x) = \ln|u(x)| + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

6.6.1 Exemple

Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = \frac{2}{2x-1}$ définie dur $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$.

$$F(x) = \ln|2x-1| + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Or :

$$x > \frac{1}{2}$$

$$2x - 1 > 0$$
$$|2x-1| = 2x-1$$

Et donc :

$$F(x) = \ln(2x-1) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = \frac{2}{2x-1}$ définie dur $I =]-\infty; \frac{1}{2}[$.

$$F(x) = \ln|2x-1| + k = \ln(1-2x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

6.7 Fonction logarithme décimale

Le logarithme décimal est définie ainsi :

$$x \mapsto \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$
$$]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

Les logarithmes décimaux sont les logarithmes les plus utilisés en sciences physique et en technologie. Il permettent notamment d'exprimer l'intensité d'un son en décibels (dB) plutôt qu'en pascal (Pa) et de calculer le pH de solutions en chimie.

Chapitre 7

Fonctions exponentielles

Après l'introduction de la fonction logarithme, nous allons voir la fonction exponentielle. Ces deux fonctions font partie des fonctions de référence en mathématique et en physique. Ces fonctions interviennent souvent dans de nombreux calculs.

7.1 Définition

La fonction exponentielle est définie par la formule suivante :

$$f(x) = \exp_a(x) = a^x$$

Ce qui signifie qu'une exponentielle de base a associe l'image a^x à l'antécédent x. Dans notre cas, nous n'utiliserons que l'exponentielle de base e. Lorsque l'exponentielle est exprimée sous sa base e, on dit qu'elle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien :

$$f(x) = e^x \Rightarrow x = \ln(f(x))$$

On note la fonction exponentielle de base e de la façon suivante :

$$x \mapsto e^x$$
$$]-\infty, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$$

7.1.1 exemple

Résoudre $e^{2x+5} > 3$

7.2 Propriétés

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$
3. $\forall x > 0, e^{\ln x} = x$
4. $e^1 = e \approx 2,72$

On dit que la fonction logarithme "transforme un produit en somme".
La fonction exponentielle "transforme une somme en produit"

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= e^x \times e^y \\ \ln(e^{x+y}) &= \ln(e^x \times e^y) \\ x+y &= \ln(e^x) + \ln(e^y) \\ x+y &= x+y \end{aligned}$$

1. $e^x = e^{x+0} = e^x \times e^0 \rightarrow e^0 = 1$
2. $e^{2x} = e^{x+x} = e^x \times e^x = (e^x)^2$
3. $e^{nx} = (e^x)^n$
4. $\frac{1}{e^x} = \frac{e^{-x}}{e^x \times e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{e^{x-x}} = \frac{e^{-x}}{e^0} = e^{-x}$
5. $e^{x-y} = e^x \times e^{-y} = \frac{e^x}{e^y}$

7.2.1 Exemples

Résoudre :

1. $e^{2x} \times e^3 = e^7$
2. $\frac{e^x}{e^3} = e^5$

Ecrire plus simplement :

1. $e^{1+\ln 2}$
2. $\frac{e^{3+\ln 5}}{e^{4+\ln 4}}$

7.3 Etudes de variations et courbe représentative

Si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$. La fonction est identique à sa dérivée.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x) = e^x$		$+$	
$f(x) = e^x$	0	$\nearrow$	$+\infty$

TAB. 7.1 – Tableau de variation e^x

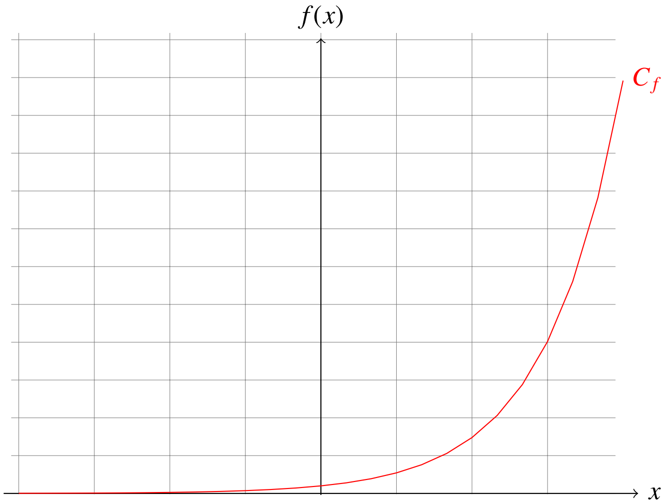


FIG. 7.1 – Exponentielle de base e

7.4 Compléments dérivée et limites, primitives

7.4.1 Dérivées

$$\begin{cases} (e^x)' = e^x \\ (e^u)' = u'e^u \end{cases}$$

Exemple : Calculer la dérivée de $f(x) = e^{3x+2}$.

7.4.2 Limites

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty \end{cases}$$

On dit que l'exponentielle l'emporte sur x à la puissance n.
Exemple : Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$

7.4.3 Primitives

Si $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ alors $F(x) = e^{u(x)} + k$. Exemple : Calculer la primitive de $f(x) = xe^{x^2+1}$ qui vaut 0 en $x = 0$.

7.5 Exponentielle de base a

L'exponentielle de base a avec $a > 0$ est définie par :

$$f(x) = \exp_a(x) = a^x$$

$$\log_a(a) = 1$$

Toutes les règles énoncées précédemment pour l'exponentielle de base e peuvent être adaptées aux exponentielles de base a en prenant en compte un logarithme de base a. Le logarithme népérien est un logaritme de base e et le logarithme décimal, un logarithme de base 10.

7.5.1 Exercice

Résoudre les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} 3^x = 5 \\ X^2 - X - 2 = 0 \end{cases}$$

En déduire les solutions de :

$$9^x - 3^x - 2$$

Chapitre 8

Equations différentielles

8.1 Compléments sur les dérivées

Lors des chapitres précédents, nous avons la fonction dérivée $f'(x)$. Cette fonction peut aussi s'écrire :

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Où $f'(x)$ est la dérivée de f par rapport à x.
On peut alors définir une dérivée seconde $f''(x)$ qui correspond à la dérivée de la dérivée :

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Ainsi, on peut dériver une fonction n fois et obtenir la dérivée n ième de f :

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

8.1.1 Exemple

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x \\ f'(x) &= 3x^2 + 2 \\ f''(x) &= 6x \\ f^{(3)}(x) &= 6 \end{aligned}$$

8.2 Equations différentielles

Les équations permettent l'étude de phénomènes évoluant dans le temps et/ou dans l'espace ce qui conduit souvent à des relations liant une fonction à une ou plusieurs de ses dérivées. Une équation différentielle est donc de la forme :

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \cdots) = 0$$

8.2.1 Application

Tous les phénomènes physiques répondent aux équations différentielles :
- La charge d'un condensateur en électricité
- La prolifération des bactéries en biologie
- La trajectoire d'un astre en mécanique
- L'évolution des cours boursiers en économie

8.2.2 Notation

Par soucis de simplification, on utilisera les notations suivantes :

$$f(x) = y$$
$$f'(x) = y'$$
$$f''(x) = y''$$

8.3 Equation de la forme $y' = ay$

Les équations différentielles sous cette forme sont dites équations du premier ordre car seule la dérivée première apparaît. Les solutions sont de la forme :

$$y = ke^{ax} \; k \in \mathbb{R}$$

8.3.1 Démonstration 1

$$y = ke^{ax}$$
$$y' = ake^{ax} = ay$$

Donc y est solution.

8.3.2 Démonstration 2

$$y' = ay \Rightarrow \frac{y'}{y}$$

Ensuite, si on calcule la primitive de chaque coté de l'équation, on trouve :

$$\ln y = ax + C$$

Puis on calcule l'exponentielle de chaque membre :

$$y = e^{ax+C} = e^{ax}e^{C}$$

Il ne reste plus qu'à poser $k = e^C$ car e^C est une constante et on obtient :

$$y = ke^{ax}$$

Dans cette solution, k peut prendre n'importe quelle valeur. Cependant, dans l'étude d'un phénomène physique, on connaît généralement son état à l'origine c'est à dire sa condition initiale $y(x_0) = y_0$. Dans ce cas, l'équation différentielle n'a plus qu'une seule solution car on a :

$$y_0 = ke^{ax_0} \Rightarrow k = \frac{y_0}{e^{ax_0}}$$

Donc, la solution de l'équation $y' = ay$ ayant pour condition initiale $y(x_0) = y_0$ est :

$$y = y_0 e^{a(x-x_0)}$$

8.3.3 Exemple

Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' = 2y$ telle que $y(0) = 3$.
Dans ces équations, $a = 2$, $y_0 = 3$, $x_0 = 0$ donc la solution est :

$$y = y_0 e^{a(x-x_0)} = 3e^{2x}$$

8.4 Equation de la forme $y'' + w^2 y = 0$

Ces équations sont dites du second ordre car elles font intervenir la dérivée seconde. On constate l'absence de la dérivée première. Les solutions de cette équation sont du type :

$$y = A\cos(wx) + B\sin(wy) \; A, B \in \mathbb{R}$$

8.4.1 Démonstration

$$\begin{aligned}
y &= A\cos(wx) + B\sin(wy) \\
y' &= -Aw\sin(wx) + Bw\cos(wy) \\
y'' &= -Aw^2\cos(wx) - Bw^2\sin(wy) \\
&= -w^2(A\cos(wx) + B\sin(wy)) \\
&= -w^2 y
\end{aligned}$$

Donc y est bien solution de l'équation différentielle.

8.4.2 Remarque

En physique, la solution est souvent donnée sous la forme $y = C\cos(wx + \varphi)$ ou C et φ sont des constantes réelles.
Pour connaître la solution unique de ce type d'équation, il nous faut deux conditions initiales pour déterminer les deux constantes.

8.4.3 Exemple

Donner la solution de l'équation différentielle $4y'' + 9y = 0$ vérifiant les conditions initiales $y(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ et $y'(\pi) = \frac{9}{2}$.

8.5 Equation avec second membre $ay' + by = g(x)$

La solution de $ay' + by = g(x)$ est égale à la somme de la solution générale y_g de l'équation sans second membre $ay' + by = 0$ et d'une solution particulière y_p del'équation avec second membre.

$$y = y_g + y_p$$

8.5.1 Démonstration

$$ay' + by = g(x) \tag{8.5.1}$$

Si on suppose y_p solution particuliére de 8.5.1, on a alors :

$$ay'_p + by_p = g(x) \tag{8.5.2}$$

Si on calcule maintenant (8.5.1-8.5.2), on obtient :

$$a(y' - y'_p) + b(y - y_p) = 0 \Rightarrow a(y - y_p)' + b(y - y_p) = 0 \Rightarrow a(y_g)' + b(y_g) = 0$$

En posant $y_g = y - y_p$. On remarque que y_g est bien las solution de l'équation différentielle sans second membre. On a donc :

$$y = y_g + y_p$$

8.5.2 Exemple

Résoudre $3y' + 2y = 5$

8.6 Forme générale d'une équation linéaire

8.6.1 Sans second membre

$ay' + g(x)y = 0$. Les solutions de ce type d'équations sont de la forme :

$$y = ke^{-\frac{G(x)}{a}}$$

Dans cette relation, $G(x)$ est la primitive de la fonction g.

Démonstration

$$ay' + g(x)y = 0 \rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{g(x)}{a}$$

En calculant la primitive de chaque membre :

$$\ln y = -\frac{1}{a}\int g(x)dx = -\frac{1}{a}G(x) + C$$

Puis, on applique l'exponentielle à chaque membre :

$$y = ke^{-\frac{G(x)}{a}}$$

8.6.2 Avec second membre

$ay' + g(x)y = h(x)$.

Exemple

$y' - \frac{y}{x} = x^2$. On calcule d'abord la solution générale sans second membre. $y' - \frac{y}{x} = 0$. On a $g(x) = -\frac{1}{x}$ et $a = 1$. $G(x) = -\ln x$ et la solution est donc :

$$y = ke^{-\frac{-\ln x}{a}} = kx$$

Ensuite, on utilise la méthode de variation constante. On pose $y = K(x) \times x$. $y' = K'(x)x + K(x)$. Si on reporte ces équations dans l'équation différentielle de départ, on obtient :

$$\begin{aligned} K'(x)x + K(x) - K(x) &= x^2 \\ K'(x)x &= x^2 \\ K'(x) &= x \Rightarrow K(x) = \frac{x^2}{2} + k, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

La solution de l'équation différentielle est donc :

$$y = \frac{x^3}{2} + kx$$

8.7 Discrétisation des équations différentielles

Calcul de solution analytiques et méthodes numériques.
Nous prendrons dans cette partie l'exemple de la déformée d'un poutre encastrée. Pour une poutre encastrée en $x = 0$, la déformée de la poutre est la fonction y qui lie la déformation de flexion de la poutre à la position x. x varie en tre 0 à l'encastrement et l, la longueur de la poutre, à son extrémité.

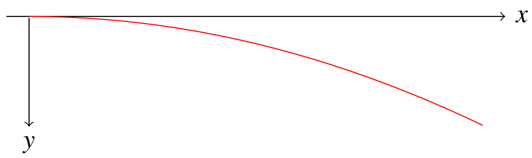


FIG. 8.1 – Déformée d'une poutre

A l'aide des caractéristiques du matériaux qui sont E son module d'élasticité et J l'inertie de sa section, on peut calculer cette déformée à partir d'un équation différentielle :

$$y'' = -\frac{M(x)}{EJ}$$

Avec $M(x)$ le moment résultant au point de coordonnée x. Si on applique un poids P à l'extrémité de la poutre, alors le moment résultant en un point A de coordonnée x vaut :

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{P} = (l-x)\overrightarrow{i} \wedge (-P\overrightarrow{j}) = -P(l-x)\overrightarrow{k}$$

On en déduit que $y'' = \frac{P}{EJ}(l-x)$. Si on intègre une première fois cette équation , on trouve :

$$y' = \frac{P}{EJ}(lx - \frac{x^2}{2} + C_1)$$

Puis en intégrant une deuxième fois :

$$y = \frac{P}{EJ}(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2)$$

Il reste à déterminer C_1 et C_2 à partir des conditions initiales. On sait qu'à l'encastrement en $x = 0$, la déformée est nulle. $y(0) = 0$ donc $C_2 = 0$. Aussi, le coefficient directeur de la déformée soit la pente à l'encastrement est nulle donc $y'(0) = 0$ et $C_1 = 0$. On obtient alors la solution analytique et exacte de la déformée d'une poutre encastrée soumise à un poids P à son extrémité :

$$y = \frac{P}{EJ}(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6})$$

On définit la flêche comme la déformée maximale de la poutre. Dans notre cas, la flêche se situe en $x = l$. On a donc :

$$f = y(l) = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

8.8 Introduction aux méthodes numériques

Il est souvent difficile voire impossible de trouver des solutions analytiques à une équation différentielle. On utilise alors des méthodes numériques permmettant de trouver une solution approchée au problème. Il faut tout d'abord commencer par discrétiser le domaine c'est à dire le découper en plusieurs parties plus petites (maillage).

8.8.1 Principe

On rappelle que le nombre dérivé d'une fonction en $x = x_0$ vaut :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

On peut poser comme approximation que quand h est petit, alors on a :

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La première étape consiste donc à découper notre poutre à l'aide de points appelés "noeuds" équidistants. On appelle ce découpage un maillage.

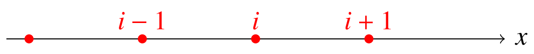


FIG. 8.2 – Maillage

Si on note Δx la distance entre deux noeuds, on a :

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + 1) - f(x_i)}{\Delta x}$$

Que l'on noterra :

$$f'_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

De la même manière on a :

$$\begin{aligned}
f''_i &= \frac{df'_i}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}\right) \\
&= \frac{1}{\Delta x}\frac{d}{dx}(f_{i+1} - f_i) \\
&= \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}\right) \\
f''_i &= \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}
\end{aligned}$$

8.9 Application à la poutre encastrée

Si sur notre poutre encastrée, on prend quatre noeuds, alors $\Delta x = \frac{l}{3}$

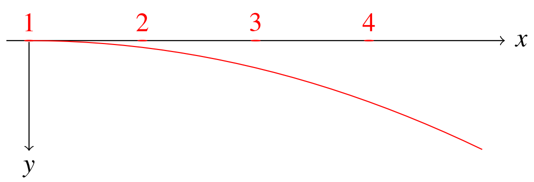


FIG. 8.3 – Application à la poutre encastrée

On a toujours $y'' = \frac{P}{EJ}(l-x)$ ou $l-x$ est la distance de P au noeud considéré. Posons $A = \frac{P}{EJ}$. Nous avons :

- Au noeud 2 : $y''_2 = \frac{y_3-2y_2+y_1}{\Delta x^2} = A \times 2\Delta x$
- Au noeud 3 : $y''_3 = \frac{y_4-2y_3+y_2}{\Delta x^2} = A \times \Delta x$

En utilisant les conditions aux limites, on trouve :

- En $x = 0$, $y = 0$ donc $y_1 = 0$
- En $x = 0$, $y' = 0$ donc $\frac{y_2-y_1}{\Delta x} = 0$ et $y_2 = 0$

On en déduit donc que $y_3 = 2A\Delta x^3$ et $y_4 - 3y_3 = A\Delta x^3 \Rightarrow y_4 = 5A\Delta x^3$. Or $\Delta x = \frac{l}{3}$. On a donc :

$$y_4 = \frac{5Pl^3}{27EJ}$$

Avec approximation, on retrouve la formule anlytique avec $\frac{5}{27}$ au lieu de $\frac{1}{3}$ ce qui donne une flêche presque deux fois plus petite que calulée anlytiquement. Cette erreur importante vient du manque de noeuds. En effet, il est possible d'améliorer le calcul en augmentant le nombre de noeuds et de ce fait le temps de calcul.
Soit n le nombre de noeuds. Au noeud 2, on a $y''_2 = \frac{y_3-2y_2+y_1}{\Delta x^2} = \frac{P}{EJ} \times (n-2)\Delta x$. On constate donc que :

$$\begin{cases} y_3 - 2y_2 + y_1 = (n-2) \times K \\ y_4 - 2y_3 + y_2 = (n-3) \times K \\ \dots \\ y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} = 1 \times K \\ \end{cases}$$

On peut montrer que $y_n = \frac{Pl^3}{EJ}\frac{(n-2)(2n-3)}{6(n-1)^2}$. On constate que :

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

Autrement dit, la solution numérique tend vers la solution analytique quand le nombre de noeuds tend vers l'infini. Cependant, le temps de calcul augmente avec le nombre de noeuds. Il faut donc trouver un bon compromis entre temps et précision du calcul.

Chapitre 9

Les matrices

Le calcul matriciel permet de réaliser des caluls linéaires en bloc et permet da manipuler des tableaux de valeurs en utilisant une écriture condensée. Une matrice M est de taille $(m \times n)$, c'est à dire qu'elle possède m lignes sur n colonnes. Exemple d'une matrice (2×3)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

9.1 Les matices (2×2)

Les matrices (2×2) permettent d'effectuer la rotation d'un point dans l'espace ou alors de résoudre un système à deux équations.

9.1.1 Rotation d'un point dans l'espace

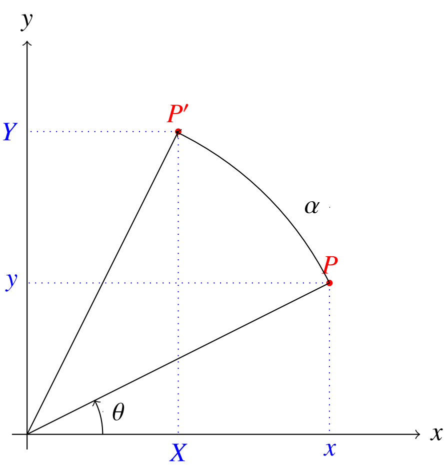


Fig. 9.1 – Rotation d'un point P

On sait que :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

et que :

$$\begin{cases} X = \rho\cos(\theta+\alpha) \\ Y = \rho\sin(\theta+\alpha) \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} X = \rho\cos\theta\cos\alpha - \rho\sin\theta\sin\alpha \\ Y = \rho\sin\theta\cos\alpha + \rho\cos\theta\sin\alpha \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} X = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Enfin, on obtient :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP'} = M\overrightarrow{OP}$$

9.1.2 Système d'équation (2×2)

Un système d'équations est défini par :

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

On peut réécrire ces équations sous forme de calcul matriciel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Soit $AX = B$ avec X le vecteur contenant les inconnues, A et B connus.

9.1.3 Règle de calcul

1. Egalité de matrices :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

   Ces deux matrices sont égales si $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ et $d_1 = d_2$.

2. Addition :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2+a_1 & b_2+b_1 \\ c_2+c_1 & d_2+d_1 \end{pmatrix}$$

3. Multiplication :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix}$$

4. Multiplication par un réel :

$$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

5. Matrice identité I : $AI = A$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Déterminant : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors le déterminant de A, $\det(A) = ad - bc$

7. Matrice inverse : L'inverse A^{-1} d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est défini tel que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. On trouve que : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

9.1.4 Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA. Conclure.

9.1.5 Résolution de systèmes d'équations

Première méthode : inversion de matrice

Nous avons vu précédemment qu'un système pouvait s'écrire sous la forme $AX = B$. Si on multiplie chaque coté de l'équation par la matrice A^{-1}, on obtient :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Deuxième méthode : méthode de Cramer

Pour un système du type :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

On peut démontrer que :

$$\begin{cases} x = \dfrac{ed - bf}{\det(A)} \\ y = \dfrac{af - ce}{\det(A)} \end{cases}$$

9.1.6 Application

Résoudre le système suivant en utilisant les deux méthodes présentées.

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$$

9.2 Les matices (3×3)

Les matrices (3×3) sont composées de trois lignes sur trois colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont appliquées dans la géométrie 3D lors des calculs d'angle de vision et de positions de points dans l'espace. En 3D la matrice identité est :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9.2.1 Multiplication

La multiplication de matrices (3×3) s'effectue de la même manière que pour les matrices (2×2). On a :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

9.2.2 Déterminant

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

On a :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}$$